第3讲 一元整式方程

**课前思考**

**1．**根据下列问题列方程：

(1)买3本同样的练习本共需12元钱，求练习本的单价；

(2)买*a*(*a*是正整数)本同样的练习本共需12元钱，求练习本的单价；

(3)一个正方形的面积的4倍等于16平方厘米，求这个正方形的边长；

(4)一个正方形的面积的*b*(*b*＞0)倍等于*s*(平方单位)，求这个正方形的边长．

**说明 为了更好地使学生进行联系和比较已学过的一元一次和一元二次方程与含字母系数一元一次和一元二次方程，增加了(1)、(3)两个问题，也为解含字母的一元一次方程和一元二次方程埋下伏笔．**

**讨论**你所列出的方程之间有什么区别和联系?

**2．**(1)有一块边长为10分米的正方形薄铁皮，在它的四个角上分别剪去大小一样的一个小正方形，然后做成一个容积为48立方分米的无盖长方体物件箱．设小正方形的边长为分米，根据题意列方程；

(2)某厂2013年产值为100万元，计划到2017年产值增长到161.051万元．设每年的平均增长率为，根据题意列方程．

**说明 增加问题2是为了提供更多的素材，帮助学生寻找共性，感受概念，从而为接下去的归纳概念提供更多的直观认识．**

**知识梳理**

**1．含字母系数的一元一次方程及其解法**

**(1)定义：**

在方程***ax*=*b***中，*x*是未知数，*a*、*b*是用字母表示的已知数．于是，在项*ax*中，字母*a*是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，我们把*a*叫做\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，字母*b*是常数项．

如果一元一次方程中的系数用字母来表示，那么这个方程是**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**．

**(2)解法：**形如的方程的解一般有下列三种情况：

①当，原方程有唯一的解，解为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

②当，，原方程\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

③当，，原方程\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

**2．含字母系数的一元二次方程**

在方程***bx*2=2*s***(*b*>0)，*x*是未知数，*b*和*s*是用字母表示的已知数．同样地，字母*b*是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；2*s*是常数项，字母*s*也叫做\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．这个方程是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

**结论：含字母系数的一元一次和一元二次方程在解的过程中，由于字母的不确定性，在使用等式性质和根的判别式时，往往需要进行分情况进行讨论；如果字母能确定，则不需要讨论．**

**说明 通过学生自主尝试解含字母系数方程，充分暴露学生忽略等式性质中非零条件的限制及根判别式非负的要求，在分情况进行讨论的思维上的缺陷，教师再进行解释和引导，同时强调是在字母不能确定的时候才需讨论，否则不必要，从而使学生对这一思想的认识更为清晰和牢固．**

**3．一元整式方程**

(1) **一元整式方程**

如果方程中\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_未知数且两边都是关于未知数的\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，那么这个方程叫做**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**．

(2) **一元*n*次方程**

如果经过整理的一元整式方程中含未知数的项的最高次数是*n*(*n*是正整数)，那么这个方程就叫做**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**．

(3) **一元高次方程**

**①概念：**一元整式方程中含未知数的项的最高次数是*n*(*n*是正整数)，若次数*n*是大于2的正整数，这样的方程统称为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，简称**高次方程**．

**②特点：**整式方程；只含一个未知数；含未知数的项最高次数大于2次．

**典型解析**

**例1：**(1)以下关于*x*的方程没有字母系数的是( )．

(A)*ax*=1 (B)*x*2+*ax*=5 (C)*x*2+*x*=1 (D)*mx*2+1=*x*

答案：C

(2)下列关于*x*的方程是含字母系数*a*的一元二次方程的是( )．

(C)*x*+*x*2=*a* (D)*x*2(*x*2+*ax*)=*x*4

答案：C

**【变式训练】**

下列关于*x*或*y*的方程中，含字母系数的一元二次方程是( )

A．*x*2+2*x*+1=0 B．(*a*2+1)*x*=1 C D．*ay*2+*y*=1(*a*≠0)

答案：D

**例2：**判断下列关于*x*的方程，哪些是整式方程？这些整式方程分别是一元几次方程？

； ⑥*x*4+7*x*2-8=0．

解：方程①、②、③、⑥是整式方程；其中方程①是一元二次方程，方程②是一元三次方程，方程③是一元一次方程，方程⑥是一元四次方程．

**【变式训练】**

(1)判断下列关于*x*的方程，是整式方程的是( )．

(A) (B) (C) (D)

答案：B

(2)下面四个关于*x*的方程中，次数和另外三个不同的是(　　 )．

A． B． C．D．

答案：A

(3)下列关于*x*的方程是高次方程的是( )．

(A)*x*3=1 (B)*x*5= (C)*x*+=1 (D)*x*2(*x*2+1)=*x*4

答案：A

(4)判断下列关于*x*的方程，不是整式方程的在括号内打×，是整式方程的在括号内填写其次数．

①*x*2+*a*=0( )； ②*x*+81*a*=0( )； ③*a*+=5*x*4-( )；

④( )； ⑤+*x*=-3( )； ⑥*x*4+*ax*-8=0( )．

答案：①2；②1；③4；④×；⑤×；⑥4

**例3：**解下列关于*x*的方程：

(1)*ax*+*b*2=*bx*+*a*2(*a*≠*b*)； (2)*bx*2=2*s*(*b*>0，*s*>0)．

解：(1)移项，得*ax*-*bx*=*a*2-*b*2．

合并同类项，得(*a*-*b*)*x*=*a*2-*b*2．

因为*a*≠*b*，所以*a*-*b*≠0． ←用一个整式去除方程两边时，必须对这个整式的取值是否可能为零进行判断．

两边同除以*a*-*b*，得

即*x*=*a*+*b*．

所以，原方程的根是*x*=*a*+*b*．

(2)因为*b*>0，所以可在两边同除以*b*，得

又因为*s*>0，所以

←在实数范围内实施开平方运算，必须先判断被开方数是否为非负的．

两边同时开平方，得，

所以，原方程的根是

**【变式训练】**

解方程：(1)2*ax*-*x*=2(*a*≠)； (2)(*a*2-*b*2)*x*2+2(*a*2+*b*2)*x*+(*a*2-*b*2)=0，其中*a*+*b*≠0，*a*-*b*≠0．

**满分解答：**方法一(公式法)

因为*a*+*b*≠0，*a*-*b*≠0，所以*a*2-*b*2≠0．

此方程为一元二次方程，得

所以

方法二(因式分解法)

(*a*2-*b*2)*x*2+2(*a*2+*b*2)*x*+(*a*2-*b*2)=0．

[(*a*+*b*)*x*+(*a*-*b*)][(*a*-*b*)*x*+(*a*+*b*)]=0．

则(*a*-*b*)*x*+(*a*+*b*)=0或(*a*+*b*)*x*+(*a*-*b*)=0，

**技巧贴士：**

本题用了两种常用的方法来求解，第一种是公式法能求解出有实数根的一元二次方程，特点为简洁，但运算略显烦琐；第二种是因式分解法，一般是用十字相乘、平方差等方法来分解，特点为快速，但技巧性更高．

**例4：**解下列关于*x*的方程：

(1)(3*a*-2)*x*=2(3-*x*)； (2)*bx*2-1=1-*x*2(*b*≠-1)．

解：(1)去括号，得3*ax*-2*x*=6-2*x*.

移项，得3*ax*-2*x*+2*x*=6.

合并同类项，得3*ax*=6.③

当*a*≠0时，方程③是一元一次方程，解得

当*a*=0时，方程③变成0·*x*=6，这时不论*x*取什么值，等式0·*x*=6都不成立，因此方程无解.

所以，当*a*≠0时，原方程的根是；当*a*=0时，原方程无解.

(2)移项，得*bx*2+*x*2=1+1.

合并同类项，得(*b*+1)*x*2=2.

因为*b*≠-1，所以*b*+1≠0.

两边同除以*b*+1，得

当*b*+1>0即*b*>-1时，由方程④解得

当*b*+1<0即*b*<-1时，方程④中，这时方程没有实数根.

所以，当*b*>-1时，原方程的根是

当*b*<-1时，原方程没有实数根.

**【变式训练】**

(1)解关于*x*的方程*m*(*x*-1)=3*x*+2.

解 原方程整理得.

当，即时，原方程的解为；

当，即时，原方程化为，则原方程无解.

(2)解关于*x*的方程*ax*-*b*=2*x*-3.

解 原方程整理得.

当，即时，则原方程的解为；

当，，即，时，原方程化为，则原方程无解；

当，，即，时，原方程化为，则原方程有无数解.

(3)解关于*x*的方程=*x*2-2.

答案：*a*=2时，一切实数；*a*≥-2且*a*≠2时*a*<-2时，无解

**例5：**已知关于*x*的方程2*a*(*x*-1)=(5-*a*)*x*+3*b* 无解，求*a*，*b*的取值范围.

解 原方程整理得.

因为原方程无解，所以，，

即，.

**【变式训练】**

(1)关于*x*的方程*ax*=5*x*-3无解，则*a*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

(2)关于*x*的方程2*mx*-3=5*x*-4*n*有无数解，则*m*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，*n*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

(3)已知关于*x*的方程3[*x*-2(*x*-有相同的解，那么这个解是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：(1)5；(2)，；(3).

**同步训练**

**一、填空题**

1．若方程*ax*=10(*a*≠0)，*bx*2=4*s*(*b*≠0)都是关于*x*的方程，那么*a*、*b*、*s*叫做\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

2．关于*x*的方程3*x*4+2*ax*-1=0是一元\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_次方程.

3．关于*x*的方程*ax*+*x*+2=0(*a*≠-1)的解是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

4．如果关于*x*的方程3*x*2+*m*=0有实数根，那么*m*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

5．如果关于*x*的方程3*x*+*mx*=5无解，那么*m*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

6．当*a*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_时，关于*x*的方程*ax*-2=*a*-2*x*有无数个解.

7．在关于*x*的方程*ax*=*b*中，当\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_时，方程有唯一解，解是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；当\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_时，方程有无数个解；当\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_时，方程无解.

8．请写出一个关于*x*的高次方程\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：如*x*3=1

**二、选择题**

9．下列说法错误的个数是( ).

①关于*x*的方程*ax*=*b*的解是*x*=

②关于*x*的方程*x*2=-*a*无解；

③关于*x*的方程(*a*2+1)*x*=*b*有唯一解．

(A)0 (B)1 (C)2 (D)3

答案：C

10．下列关于*x*的方程中，高次方程是( ).

A．*x*2-3*x*=0 B*x*5+3*x*4+2*x*-1=0 C+*x*2=1 D．*b*4*x*+2=0(*b*≠0)

答案：B

**三、解答题**

11．解关于*x*的方程：

(1)3*x*+*b*=*ax*+5； (2)；

(3)(*k*2+2*k*)*x*=2+*k*； (4)*a*(*ax*-1)=*x*+1.

答案：(1)当，时，解为一切数；当，时，无解；当时，；

(2)当时，解为一切数；当时，.

(3)*k*=-2时，一切实数；*k*=0时，无解；*k*≠-2且*k*≠0时；

(4)*a*=-1时，一切实数；*a*=1时，无解；*a*≠±1时，*x*=；

12．解关于*x*的方程：

(1)(*by*)2+3*y*2=1； (2) *m*2*x*2+2*m*=-2*x*2；

(3)*a*2*x*2+*x*2=(*ax*+1)(*ax*-1)+*a*； (4)(*ax*)2=1；

(5)(*ax*+1)(*ax*-1)=*a*2； (6)*mx*2=-1；

(7)*a*(*x*2-*a*)=1； (8)(*a*-3)*x*2-4=0；

(9)*x*(*ax*-1)=*a*-*x*； (10)(*a*>0，*b*>0).

答案：(3)*a*≥1时*a*<1时，无解；(4)*a*=0时，无解；*a*≠0(5)*a*=0时，无解；*a*≠0时(6)*m*≥0时，无解；*m*<0时，；(7)*a*≤0时，无解；*a*>0时；(8)*a*≤3时，无解；*a*>3时；(9)*a*=0时，一切实数；*a*≠0时，*x*=±1；(10)*a*=*b*时，一切实数；*a*≠*b*时，*x*=±

**【探索创新】**

如果*a*，*b*为定值，关于*x*的方程无论*k*为何值时，它的根总是1，求*a*，*b*的值．

答案：，.提示：把方程看作是关于的方程，则这个关于的方程的解为一切数.

**走进中考**

(2012·上海中考) 如果关于的方程(为常数)没有实数根，那么的取值范围是 ．

答案：